Шифр: В-24

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

МАТЕМАТИКА

2018/2019

Ленинградская область

Район Сосновый Бор

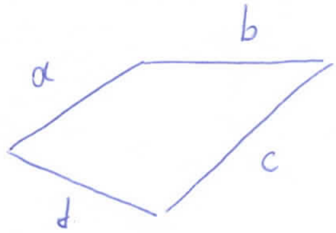
Школа МБОУ „Лицей № 8"

Класс 10

ФИО Чигарев Андрей Сергеевич

1	2	3	4	5	Σ
7	0	0	0	0	7

10.2.



Обозначим стороны четырёхугольника за a, b, c и d.

По условию,

$a+b+c \vdots d$, $(a+b+c = dx,\ x \in N)$
$a+c+d \vdots b$, $(a+c+d = by,\ y \in N)$
$a+d+b \vdots c$, $(a+d+b = cr,\ r \in N)$
$d+b+c \vdots a$, $(d+b+c = az,\ z \in N)$

$$\Rightarrow 10^{100} = \frac{dx+by+cr+az}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{x} + \frac{a+c+d}{y} + \frac{a+d+b}{r} + \frac{d+b+c}{z} = 10^{100} \qquad (2)$$

Приведя (2) к общему знаменателю, получим, что

$$\frac{(yrz+xrz+yxz)a+(yrz+xyz+xyr)b+(yrz+xrz+xyr)c+(xrz+xyz+xyr)d}{xyrz} = 10^{100}$$

$$\frac{(yr+xr+yx)}{xyr}a + \frac{(rz+xz+xr)}{xrz}b + \frac{(yz+xz+xy)}{xyz}c + \frac{(rz+yz+yr)}{yrz}d = 10^{100}$$

?

$$\frac{yr+xr+yx}{xyr} = 1;\quad \frac{rz+xz+xr}{xrz} = 1;\quad \frac{yz+xz+xy}{xyz} = 1;\quad \frac{rz+yz+yr}{yrz} = 1.$$

$$\Rightarrow y = x = r = z$$

$$\frac{dx+by+cr+az}{3} = 10^{100} = a+b+c+d$$

$$\Rightarrow y = x = r = z = 3.$$

1/6

$\Rightarrow a = b = c = d$

$\Rightarrow$ Четырёхугольник - ромб.

ч.т.д.

10.1.

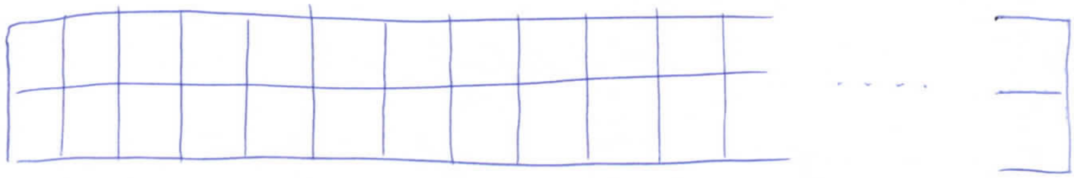
Допустим сперва, что все на острове - рыцари.
Очевидно, что случай, когда все числа - целые, даст нам не максимальное количество рыцарей: равенство числу в условии не предусмотрено (в высказываниях)
Рассмотрим случай, когда числа находятся в промежутке от 1 до 10: результат будет максимален.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
ч.	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	$\Rightarrow 10$
1.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	~~✓~~ ✓	$\Rightarrow$ X
2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	

Пусть сначала все - рыцари.
Тогда они ответили правду в первом опросе.
Во втором десятый не мог сказать правду - т.е. он лжец.
Тогда он солгал и в первом опросе. Тогда его число - ровно 10 (к примеру).
В 1 опросе он солгал, так как $10 \ngtr 10$, а во втором, отвечая, что $10 < 1$, солгал вторично.
Остальные же давали правдивые ответы.
$\Rightarrow$ Максимальное количество рыцарей - 9.

Ответ: 9.

10.3. B - 24



Сумма двух иррациональных чисел есть число иррациональное; а сумма двух рациональных - рациональное;

$\begin{pmatrix} q \in N, q_1 \in N, \\ p \in Z, p_1 \in Z. \end{pmatrix}$ $\frac{p}{q} + \frac{p_1}{q_1} = \frac{pq_1 + p_1q}{qq_1}$, т.е. тоже рациональное число.

Иррациональные же числа нельзя представить таким образом, а количество их знаков после запятой бесконечно и не соответствует никаким периодам.

$\Rightarrow$ Сумма двух иррациональных чисел будет иррациональным числом.

Нам необходимо, чтобы все суммы были рациональными. $\Rightarrow$ Все слагаемые должны быть рациональными числами.

Т.е. в первой строке таблицы не должно быть иррациональных чисел.

Ответ: 0.

Пусть в клетках таблицы записаны два иррациональных ~~чис~~ числа, которые в сумме дают рациональное число.

$$(100 - \sqrt{17}) + (100 + \sqrt{17}) = 200$$

~~Т.е.~~ Предположим теперь, что вся верхняя строка - иррациональные числа. Но число 2019 - нечётное, т.е. „пар" будет 1009, и одно число будет рациональным.

3~~2~~/6

Но тогда в столбике будут два одинаковых числа; $\Rightarrow$ Рациональных чисел > 1. В-24

Если их будет два, то мы снова придём к ситуации, в которой одно из иррациональных чисел останется без иррациональной пары, которая в сумме с ним даёт рациональное число.

Т.е. количество рациональных чисел – 3, что является самым минимальным, т.к. нам необходимо получить максимальное количество иррациональных чисел, т.е. 2016.

Ответ: 2016.

№4.

Заметим, что степени x в многочлене $P_n(x)$ чётные. То есть для его обращения в ноль необходимо, чтобы знак a_n менялся.* ~~т.е. для того, чтобы нашлось N, такое, что $a_{N-2} < a_{N+1} < a_N$, последовательность~~

Если в $P_n(x)$ коэффициент при старшей степени $x \neq 1$ и степени x чётны, и многочлен в итоге равен нулю, то $a_1 > a_2 \dots > a_n$, т.к. степени x при a_1 и a_2 больше степеней x при a_n и a_{n-1}; Также a_{n+1} – наименьший корень многочлена.

* Прим. Т.к. количество членов – 2019, корень ± 1 не подходит.

~~№1~~

10.4.

$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n$

При $n \geqslant 2018$ a_{n+1} - наименьший корень $P_n(x)$.

Пусть $n = 2018$. Тогда многочлен $P_n(x)$ имеет 2019 одночленов в своём составе. При этом степени x чётны, т.е. знаки коэффициентов должны быть различны для того, чтобы в сумме получился 0. Также, т.к. степени x в „начале" многочлена больше степеней x в его „конце", то ~~$|a_n| > |a_1|$~~. ~~$\Rightarrow |a_1| < |a_2| < \ldots < |a_n|$.~~ ~~Но знак a меняется для того, чтобы~~ уменьшение a_x будет идти плавно, как и уменьшение степени x.

$\Rightarrow a_n$ - последний член, где $n = 2018$.

Аналогично и для $n = 2019$;

т.е. $a_{2019} < a_{2018}$ и так далее.

$\Rightarrow N = 2018$.

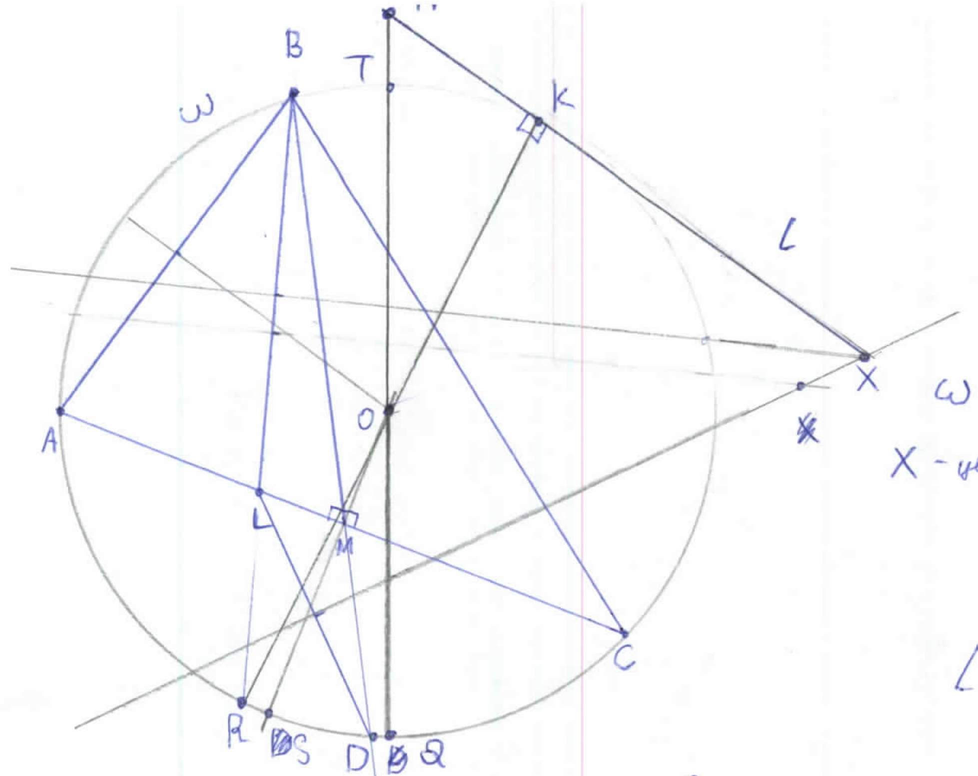
$a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \ldots$

Т.е. такое число N существует.

*Прим. Многочлен обращается в 0, т.к. при $n \geqslant 2018$ есть один гарантированный корень a_{n+1}.

ч.т.д.

10.5.



В-24

Дано:

$\triangle ABC$

BL - биссектриса

BM - медиана

ω - описана около $\triangle ABC$

X - центр окр. опис. около $\triangle BDL$

$\ell \parallel AC$

Док-ть, что:

ℓ - касательная к ω.

Доказательство.

$\angle ABL = \angle CBL$, т.к. BL - биссектриса $\angle B$.

Т.к. оба угла вписанные, то $\smile AR = \smile RC$.

$AM = MC$. $O\cancel{R}M$ - серединный перпендикуляр

R и S совпадут, т.к.

$\triangle AMS$ и $\triangle CMS$:

$AM = MC$

MS - общая

$\angle AMS = \angle CMS = 90°$ } т.к. RO - серединный перпендикуляр.

$\Rightarrow \triangle AMS = \triangle CMS$

RK - диаметр ω.

$RO \perp AC$, $\Rightarrow RO \perp \ell$, т.к. RO - серединный перпендикуляр.

Осталось лишь доказать, что $\ell \cap \omega = K$.

Проведём секущую ONQ.

$\triangle NKO$ - прямоугольный. Пусть $NK = y$, $NT = x$.

$OT = OQ = \cancel{OK} = r$. Применим теорему о квадрате касательной и теорему Пифагора. При совпадении результатов ℓ - касательная:

$(x+r)^2 = y^2 + OK^2$ $\quad$ $x(x+2r) = y^2$

$\Rightarrow x^2 + r^2 + 2rx - OK^2 = x^2 + 2rx$

$OK^2 = r^2 \Rightarrow OK = r$. т.е. ℓ - касательная. Ч.т.д.

6/6

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	X	14

10.7.

Дано: $a \in R$, $b \in R$, $b > a > 1$.

$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$$

$$x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$$

$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$ – при этом условии $x_{n+1} < x_n$.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}}{2\sqrt[2^{n\cdot 2}]{b} - 2\sqrt[2^{n\cdot 2}]{a}}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}}{\sqrt[2^n]{2^n\sqrt{b}} - \sqrt[2^n]{2^n\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[2^{n+1}]{b^2} - \sqrt[2^{n+1}]{a^2}}{\sqrt[2^{n+1}]{2^{n+1}b} - \sqrt[2^{n+1}]{2^{n+1}a}} = \frac{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}}{2};$$

Т.к. $a > 1$ и $b > 1$, то и $\sqrt[2^{n+1}]{b} > 1$, и $\sqrt[2^{n+1}]{a} > 1$.

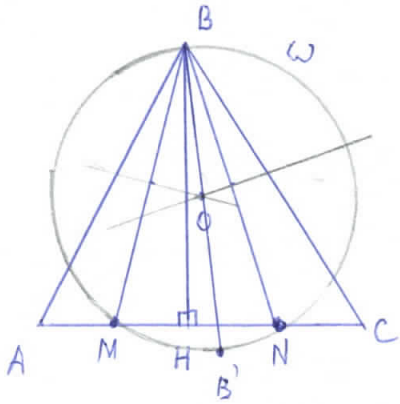
Т.е. $\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 2$

$\Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$.

$\Rightarrow$ Последовательность убывает.

ч.т.д.

№ 10.8.



Дано:

$\triangle ABC$ - остроугольный

BH - высота

$AM = MH$; $HN = NC$

O - центр ω

BB_1' - диаметр.

Док-ть, что:

$AB' = CB'$

В-24

№ 10.6.

Очевидно, что два из данных чисел чётны, а другие нечётны. Пусть a и c четные, а b и d – нечет. Или a, или c делятся на 4, т.к. четыре числа, больших 100, идут подряд. a, b, c, d

~~① Пусть $a \vdots 4$.~~

$\cancel{a + b + d = 3a + 4} =$

$= 4\left(\frac{3a}{4} + 1\right)$

Если $\frac{a}{4}$ – нечётное, то

$a + b + d = 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{3a}{8} + 0,5\right)$

$\neq 4; \neq 2$, т.к. $a > 100$

Если $\frac{a}{4}$ – чётное, то $a \vdots 8$,

$\cancel{\frac{a}{4} \in \{26; 28; 30\}}$

② Пусть $c \vdots 4$

$b + d + c = d - 1 + d + d - 2 = 3d - 3 =$

$= 3(d-1) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{d-1}{2}$,

т.к. d нечетно.

$\frac{d-1}{2} \neq 3$ и $\frac{d-1}{2} \neq 2$,

т.к. $d > 100$.

ч.т.д.

① $c + b + d = 3c = 3 \cdot c = 3 \cdot 2 \cdot \frac{c}{2}$,

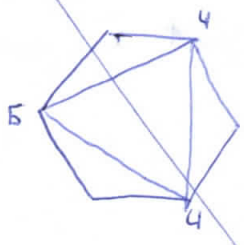
$\frac{c}{2} \neq 3$, $\frac{c}{2} \neq 2$, т.к. > 100.

ч.т.д.

2/4

10.9. В-24

Заметим, что в шести- и более угольниках невозможна такая конфигурация:



Пусть количество раскрасок - k.

Так как тогда одна из диагоналей не будет ~~хорошей~~ разноцветной.

Очевидно, что из вершины можно провести $n-3$ диагоналей; причём сделать это можно будет из каждой из вершин, однако каждая диагональ будет учитываться дважды;

$\Rightarrow$ Кол-во способов провести диагонали - $\frac{n^2-3n}{2}$.

Способов раскрасок - ~~n^2-3n, так как~~ +

$(n^2-3n)+n-4$

10.6.

Пусть нам даны числа a, b, c, d.

1) a и c - чётные.

$b+c+d = 3c = 3\cdot\frac{c}{2}\cdot 2$

$\frac{c}{2}\neq 2$, $\frac{c}{2}\neq 3$, т.к. $c>100$

b и d - чётные.

$a+b+c = 3b = 3\cdot\frac{b}{2}\cdot 2$

$\frac{b}{2}\neq 2$, $\frac{b}{2}\neq 3$, т.к. $b>100$

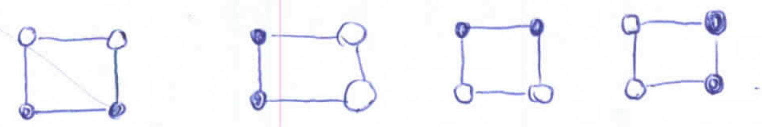
Т.е. в любом случае три из четырёх данных чисел в сумме дадут число, кратное 6, т.е. сумма разложится на следующие множители: $S=2\cdot 3\cdot\frac{S}{6}$, где S - сумма.

ч.т.д.

3/4

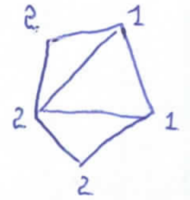
10.9. B - 24

Приведём раскраски ~~квадрата~~ четырехугольника:



$\{ = 8$ ~~4~~ раскрасок

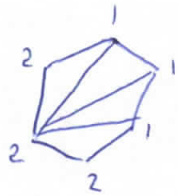
У пятиугольника будет проведено 2 ~~3~~ диагонали для разделения его на треугольники.



= 8 раскрасок. ~~Кол-во сторон — 5.~~

~~⇒ Итог — 40.~~

В шестиугольнике возможны 2 конфигурации:



= 8 раскрасок

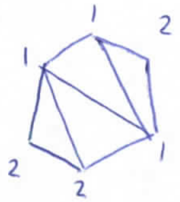
~~Кол-во сторон — 6~~

~~⇒ 48~~

~~16 раскрасок~~ 16 раскрасок

~~Кол-во сторон пар сторон~~

~~3 ⇒ 24~~



= 8 раскрасок

~~Общая формула — 2^{n-2}~~ ~~Итого 72~~

То есть есть две конфигурации:

- Отсечение треугольников диагоналями из одной точки;
- Отсечение треугольников диагоналями, каждая из которых проведена ~~в~~ из той точки, в которую проведена предыдущая.

Конфигурация видов , и т.д. невозможна по условию о разноцветности диагоналей. Везде остаются две „свободные" вершины и начальная точка, т.е. вариантов для каждой допустимой конфигурации — 2^3.

~~$N = 8 \cdot 1{,}5n = 12n$, где n — число сторон~~

Ответ: ~~$12n$. Для $n = 4{,}5$ $k = 8$, для $n > 4{,}5$ $k = 16$.~~

4 / ~~4~~5 Для $4 \le n \le 5$ $k = 8$, для $n > 5$ $k = 16$

ПЯТАЯ ТОЖЕ БУДЕТ (ДОК-ВО)

В-24

10.9.

Докажем теперь, что конфигурации ~~вида~~ диагоналей вида многоугольников с нечётным кол-вом сторон с чередующимися цветами вершин не подходят. Пусть нам дан n-угольник, ~~тогд~~ и цвета в его вершинах чередуются.

Тогда из вершины k можно провести диагонали в вершины k+3 и k−3 (нумерация по часовой стрелке). Однако из вершин k−2 и k+2 можно провести диагональ, только в вершину k, чтобы не пересечь диагональ между k и k−3 или k и k+3. Но тогда диагональ не разноцветная.

ч.т.д.

С многоугольниками с нечетным количеством сторон, образованными диагоналями, ещё легче. В силу необходимости чередования цветов, условие будет нарушено, т.к. последнему „цвету" не найдется пары.

⇒ Возможны лишь две описанные в решении конфигурации диагоналей.

* прим. Употребляя „конфигурации", имеем в виду положение диагоналей в данном многоугольнике.

Употребляя „~~в~~ конфигурации вида многоугольника", имеем в виду ~~замкнутый~~ выпуклый многоугольник, сторонами которого являются диагонали данного многоугольника.

5/5